Merkblatt zur Differential- und Integralrechnung

Alexander (Axel) Straschil

11. Januar 2008

Diese lose Sammlung zu Themen der Differential- und Integralrechnung entsteht im laufe meines Informatikstudiums an der TU-Wien zur Prüfungsvorbereitung der VO Mathematik für Informatiker 2. Es handelt sich zum überwiegenden Teil um eine Zusammenfassung der Sätze aus [DGKP07]. Fehlerhinweise bitte per Email[1].

Differential- und Integralrechnung in einer Variable

Wichtige Differentiale und Integrale :

$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
0	c	$c \cdot x$
1	x	$\frac{x^2}{2}$
$a \cdot x^{a-1}$	x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x	e^x
$a \cdot \mathsf{e}^{a \cdot x}$	$\mathsf{e}^{a \cdot x}$	$\frac{\mathsf{e}^{a \cdot x}}{a}$
$a^x \cdot \ln a$	a^x	$\frac{a^x}{\ln x}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$x \cdot \ln x - x$
$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\log_a x$	$\frac{x \cdot \ln x - x}{\ln a}$
$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x$
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$x \cdot \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$x \cdot \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$
$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccot} x$	$x \cdot \operatorname{arccot} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$

Rechenregeln für die Differentialrechnung

- Konstanter Faktor: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- Summenregel: $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- Produktregel: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
  $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$
- Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$
- Kettenregel: $(f(g))' = \frac{\mathsf{d}f(g)}{\mathsf{d}g} \cdot g'(x)$
  $\left(f\left(g\left(h_{(x)}\right)\right)\right)' = f'(g) \cdot g'(h) \cdot h'(x)$
- Umkehrfunktion: $\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(f^{-1}(x))}$

Rechenregeln für die Integralrechnung

- Hauptsatz: $\int\limits_a^b f(x)dx = F|_a^b = F(b) - F(a)$
- Konstanter Faktor: $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$
  $\int_a^b c \cdot f(x)dx = x \cdot \int_a^b f(x)dx = c \cdot (F|_a^b)$
- Summenregel:
  $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- partielle Integration: $\int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx = (f(x) \cdot g(x))|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx$
- Substitution: $\int\limits_a^b f(g) \cdot g'\ dx = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(g)dg$
- Grenzen: $\int_a^b f\ dx + \int_b^c f\ dx = \int_a^c f\ dx$

Der Differentialquotient und die Ableitung Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar im Punkt x_0, falls der Grenzwert $lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert. Dieser Grenzwert ist die Ableitung von f an der Stellt x_0 und wird mit f' bzw. $\frac{df}{dx}$ bezeichnet.

Ist f im ganzen Definitionsbereich differenzierbar, so heisst die Funktion $f'(x)$ die Ableitung von f. Ist eine Funktion im Punkt x_0 differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

[1] Alexander.Straschil@student.tuwien.ac.at

Die weiteren Ableitungen werden mit f'', f''' bzw. $f^{(n)}$ bzw. $\frac{d^n f}{x^n}$ bezeichnet.

Extrema (Maxima u. Minima) Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle x_0 ein relatives Maximum, wenn für alle x aus einer eine Umgebung $U_\epsilon(x_0) \subseteq D$ gilt: $f(x) \leq f(x_0)$. Gilt dies für alle x aus D (nicht nur aus U_ϵ), so ist x_0 ein absolutens Maximum. Gleiches gilt umgekehrt für Minimia.

Ist x_0 ein Extrema, so ist $f'(x) = 0$.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung Ist f auf einem abgeschl. Intervall $[a, b]$ stetig, und auf einem offenen Intervall (a, b) differenzierbar, dann gibt es einen Punkt $x_0 \in [a, b]$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Der Satz sagt aus, dass es für jedes Intervall $[a, b]$ einen Punkt innerhalb von $[a, b]$ gibt, wo die Ableitung des Intervalles mit der des Punktes übereinstimmt, oder, geometrisch, dass es zu jeder Geraden, welche die Kurve in den Punkten $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ schneidet eine parallel Tangente gibt, welche die Kurve im Punkt $(x_0, f(x_0))$ berührt.

Gelte weiter für eine Funktion g gleiches wie für f und sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Satz von Rolle Sei f stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b) und $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

Das Innere Für das abgeschlossene Intervall $I = [a, b]$ ist offene Interval $\mathring{I} = (a, b)$ das Innere von I.

Für zwei auf dem Intervall I stetige und in dessen inneren $\mathring{I}$ differenzierbare Funktionen f und g mit $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in I$ ist die Differenz $f(x) - g(x)$ auf I konstant.

Taylorreihe $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ ist die Taylorreihe von $f(x)$ im Entwicklungspunkt x_0.

Das Taylorpolynom n-ter Ordnung mit dem Restglied (dem Fehler) R_n ist dann
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n$.

Für das Restglied R_n gilt: $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ mit $\xi \in \mathring{I}$ von $I = [x_0, x]$ (bzw. $I = [x, x_0]$).

Kurvendiskussion Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine auf D differenzierbare Funktion.

Dann ist f, wenn für alle $x \in D$ gilt:

$f'(x) \geq x$	monoton wachsend
$f'(x) > x$	streng monoton wachsend
$f'(x) \leq x$	monoton fallend
$f'(x) < x$	streng monoton fallend

Ist f zweimal stetig differenzierbar, und $f'(x_0) = 0$, dann ist x_0 ein relatives Maximum falls $f''(x_0) < 0$, und ein relatives Minimum falls $f''(x_0) > 0$.

Satz zu rel. Extrema: Sei f n-mal stetig differenzierbar, und seien alle $n - 1$ Ableitungen $f^{(k)}(x_0) = 0$ $(k = 1...n - 1)$, und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, dann gilt: Ist n gerade, dann ist x_0 ein rel. Max. wennn $f^{(n)} < 0$, sonnst ein rel. Min.. Ist n ungerade, dann existiert eine Umgebung U_ϵ von x_0 in der f streng monoton ist, und zwar fallend wenn $f^{(n)} < 0$, sonnst steigend.

Eine Stelle x_0 heißt Wendepunkt, wenn f' in x_0 ein rel. Extremum besitzt.

Wenn f dreimal differenzierbar ist, und $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann ist x_0 ein Wendepunkt.

Konvex / Konkav Eine Funktion f heisst auf einem Intervall I, wenn für alle $x, y \in I$ und alle $0 < \lambda < 1$ gilt, mit $L(x) = f(x + \lambda(y - x))$ und $R(X) = f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$:

$L \leq R$	konvex
$L < R$	streng konvex
$L \geq R$	konkav
$L > R$	streng konkav

Ist f auf I stetig und in $\mathring{I}$ differenzierbar, dann ist f auf I (streng) konvex (bzw. konkav), wenn f' auf $\mathring{I}$ (streng) monoton steigend (bzw. fallend) ist, und auch, wenn zweimal differenzierbar genau dann konvex (bzw. konkav) wenn $f''(x) \geq 0$ bzw . $f''(x) \leq 0$ (und streng konvex/konkav bei $>$ bzw. $<$).

Regel von de'Hospital Seien f und g auf $I = [a, b]$ stetige und in $\mathring{I}$ differenzierbare Funktionen, sei $x_0 \in I$ und $f(x_0) = g(x_0) = 0$, und existiere der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Dann gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Unbestimmtes Integral Sei I ein Intervall, und $f : I \to \mathbb{R}$. Jede Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$ heißt Stammfunktion oder unbestimmtes Integral von f: $F(x) = \int f(x)dx$. f ist der Integrand, und x die Integrationsvariable.

Ist F eine Stammfunktion von f, dann sind auch alle Funktionen $F + c$ Stammfunktionen von f.

Substitution d. unbest. Int. Sei F Stammfunktion von f, dann gilt: $\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x))$. Wenn g^{-1} existiert, dann folgt aus $u = g(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow \frac{du}{g'(x)} = dx$ durch einsetzen $F(g(x)) = \int f(u) \cdot g'(x)\frac{du}{g'(x)} = \int f(u)du$.

Integration mit Partialbruchzerlegung Die rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ kann man durch Polynomdivision in die Form $f(x) = a(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ umformen, wobei $a(x)$ das Ergebnis der Polynomdivision mit dem Rest $r(x)$ ist. *TODO ... schwer zu beschreiben!*

Das bestimmte Riemannsche Integral Sei $Z : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Zerlegung des Intervalls $I = [a, b]$ mit den Teilintervallen $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ $k = 1 \dots n$, und der Feinheit $\mathfrak{F}(Z) = max(|I_k|)$ (also dem längsten Intervall), sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Z mit $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{F}(Z_N) = 0$. Wenn alle beliebigen Folgen Z_n gegen den selben Grenzwert konvergieren, dann nennt man diesen Grenzwert das bestimmte Integral von f auf $[a, b]$, und die Funktion f ist dann integrierbar auf den Integrationsgrenzen $[a, b]$ mit der Integrationsvariable x.

Das bestimmte Integral von $f(x)$ mit der Stammfunktion $F(x)$ und den Integrationsgrenzen a, b entspricht dann:

$$\begin{array}{ll} a < b: & \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a) \\ a > b: & \int_b^a f(x)dx = F(x)|_b^a = F(a) - F(b) \\ a = b: & \int_a^a f(x)dx = 0 \end{array}$$

Riemann'sches Integrabilitiätskriterum und Folgerungen Eine auf dem Intervall $[a, b]$ beschränkte Funkton f ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zerlegung Z von $[a, b]$ gibt, so dass die zugehörigen Obersummen $O_Z(f)$ und Untersummen $U_Z(f)$ die Ungleichung $O_Z(f) - U_Z(f) < \epsilon$ erfüllen.

Jede auf $[a, b]$ definierte monotone Funktion ist integrierbar.

Jede auf $[a, b]$ stückweise stetige Funktion ist integrierbar (stückweise stetig im Intervall $[a, b]$ heisst, dass die Funktion im Intervall beschränkt ist, nur an endlich vielen Stellen unstetig ist, und an beiden Seiten aller Unstetigkeitsstellen die einseitigen Grenzwerte existieren).

Für jede integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist auch $|f|$ integrierbar.

Mittelwertsatz der Integralrechnung Ist f stetig auf dem Intervall $[a, b]$, dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$.

Der Satz sagt aus, dass die Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse durch ein (flächengleiches) Rechteck dargestellt werden kann, dessen Höhe ein Funktionswert aus dem Intervall $[a, b]$ ist.

Hauptsatz der Integralrechnung Für eine auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion f mit der Stammfunktion $F(x) = \int_a^b f(t)dt$ erfüllt jede Stammfunktoin F von f: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$.

Substitution bestimmter Integrale Sei f stetig auf $[a, b]$, $g : [c, d] \to [a, b]$ stetig differenzierbar und $a = g(c), b = g(d)$, dann gilt: $\int_a^b f(u)du = \int_c^d f(g(x)) \cdot g'(x)dx$.

Uneigentliche Integrale Sei f eine Funktion auf dem halboffenen Intervall $I = [a, b)$ mit $\lim_{x\to b} = \infty$ und auf jedem Teilintervall $I' = [a, c) \subset [a, b)$ integrierbar.

Dann nennt man Integrale der Form $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)dx$ uneigentliches Integral erster Art. Diese Integral kann - je nach existenz des Grenzwertes - konvergent oder divergent sein.

Sei $a \in \mathbb{R}$ fest und f auf $[a, b] \subset [a, \infty)$ integrierbar, dann heisst $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ uneigentliches Integral zweiter Art, welches - je nach Grenzwert - konvergent oder divergent sein kann.

Für auf $[0, \infty)$ stückweise stetige Funktionen f, g mit $\forall x \geq 0 : |f(x)| \leq g(x)$ gilt dann: Ist $\int_0^\infty g(x)dx$ konvergent, dann auch $\int_0^\infty f(x)dx$

Integralkriterium Für eine nichtnegative monoton fallende Funktion $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ ist das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)dx$ genau dann konvergent, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ konvergent ist.

Differential- und Integralrechnung mehrerer Variablen

Definitheit einer symmetrischen quadratischen Matrix Sei $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right]$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann ist

A definit wenn $\det A > 0$, und zwar positiv definit wenn $a > 0$, und negativ definit wenn $a < 0$. Ist $\det A < 0$, so ist A indefinit. Für andere Fälle hat dieser Satz keine Aussage!

Partielle Ableitungen Die Ableitungen von f in Richtung x bzw. y heissen partielle Ableitungen nach x bzw. y: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ und $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$. Die Ableitungen zweiter Ordnung sind: $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ und $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Für Vektorfelder ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$) müssen alle Funktionen der Zielkoordinaten partiell differenzierbar sein: $\frac{\partial f}{\partial x_k} = (\frac{\partial f_1}{\partial x_k}, \cdots, \frac{\partial f_1 m}{\partial x_k})$ für ein x_k aus $\vec{x}$.

Hesse-Matrix Ist die Matrix der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, im Falle von zwei Variablen ist $H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$.

Gradient Für eine total differenzierbare Funktion f heisst der Vektor aller partieller Ableitungen Gradient: $\mathtt{grad} f = (f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n})$ bzw. $\mathtt{grad} f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$.

Jakobi- oder Funktional-Matrix Die Jakobi-Matrix J_f beinhaltet die partiellen Ableitungen der Koordinatenfunktionen einer verktorwertigen Funktion. Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ist $J_f = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$.

Funktionaldeterminante Die Funktionaldeterminante ist die Determininate der Jakobimatrix einer vektorwertigen Funktion auf $\mathbb{R}^n$ mit $x = (x1, \dots, x_n)$ und $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

Produktregel Seien f, g zwei total differenzierbare skalarwertige ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) Funktionen, und $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Dann gilt $\mathtt{grad} h(x_0) = f(x_0) \cdot \mathtt{grad} g(x_0) + g(x_0) \cdot \mathtt{grad} f(x_0)$.

Hauptsatz über implizite Funktionen Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, $F(x_0, y_0) = 0$, $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Dann gilt $y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}$ und $x'(y) = -\frac{F_y(y, x(y))}{F_x(y, x(y))}$.

Richtungsableitung Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine an der Stelle $x = (x_1, \dots, x_n)$ total differenzierbare Funktion und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ein normierter Vektor (also $||\vec{v}|| = 1$). Dann gilt für die Ableitung in Richtung $\vec{v}$: $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x) = f_{x_1}(x) v_1 + \cdots + f_{x_n}(x) v_n = \mathtt{grad} f(x) \cdot \vec{v}$. Die Richtung mit dem großten Anstieg ist in Richtung $\mathtt{grad} f(x)$.

Kettenregel Sei f eine skalare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, g eine vektorwertige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$. Sei $F(x) = f(g(x))$, dann ist $F' = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(g_1(x), \dots, g_n(x)) \cdot g_i'(x)$.

Quadratische Taylorapproximation Die Taylorableitung zweiter Ordnung für zwei Varaiblen mit $h = x - x_0$, $k = y - y_0$, der Hesse-Matrix H_f und dem Restglied $R(x)$ ist $f(x_0, y_0) + (h, k) \cdot \mathtt{grad} f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(h, k) \cdot H_f \cdot \binom{h}{k} + R(x)$, oder allgemein für n Variablen mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $h = (h_1, \dots, h_n)$: $f(x + h) = f(x) + h \cdot \mathtt{grad} f(x) + \frac{1}{2} h \cdot H_f \cdot h^T + R(x)$.

Lokale Extrema Stationäre Punkte sind Punkte, für die $\mathtt{grad} f(x) = 0$ gilt. Sei P ein stationärer Punkt, und H_f die Hesse-Matrix von f. P ist ein relatives Maximum, wenn $H_f(P)$ negativ definit ist, ein relatives Minimum, wenn $H_f(P)$ positiv definit ist. Ist $H_f(P)$ indefinit, so liegt keine Extremum, sondern ein Sattelpunkt vor.

Extrema mit Nebenbedingungen / Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren Seien $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1 \dots m$, stetig differenzierbare Funktionen, x_0 ein lokales Extremum von f unter den Nebenbedingungen $g_1(x) = \ldots = g_m(x) = 0$, und die Gradienten von allen $g_i(x)$ linear unabhängig. Dann existieren die Werte $\lambda_{0_1}, \dots, \lambda_{0_m}$, sodass die Funktion $F(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m) := f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ die Gleichung $\mathtt{grad} F(x_0, \lambda_{0_1}, \dots, \lambda_{0_m}) = 0$ erfüllt.

Im Speziellen existiert für eine zweistellige Funktion f mit der Nebenbedigung $g(x, y) = 0$ ein λ_0, sodass die Funktion $F(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$ die Gleichung $\mathtt{grad} f(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$ erfüllt.

Bereichsintegrale Sei B der Bereich $[a, b] \times [c, d]$. Dann ist $\int \int_B f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$.

Satz von Fubini Seinen φ_1, φ_2 zwei stetige Funktionen, und $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y), c \leq y \leq d\}$, dann ist $\int\int_B f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dxdy$.

Existieren φ_1', φ_2', sodass $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \varphi_1'(x) \leq y \leq \varphi_2'(x), a \leq x \leq b\}$, so ist $\int\int_B f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{\varphi_1'(x)}^{\varphi_2'(x)} f(x,y)dydx$.

Kurven Eine Kurve ist eine stetige Abbildung $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Die Variablen einer Kurve werden als Parameter der Kurve bezeichnet.

Kurven können unterteilt, und durch einen Polygonenzug approximiert werden. Die Unterteilung einer Kurve c ist eine Zerlegung Z von $[a,b]$ mit $a = z_0 < z_1 < \cdots < z_r = b$, die Abweichung der Approximation $\sum_{i=i}^{r} ||c(z_i) - c(z_{i-1})||$ wird als Feinheit $\mathfrak{F}$ bezeichnet.

Eine Kurve ist von endlicher Länge (**rektifizierbar**), wenn die Approximation durch die Polygonenzygen bei gegen 0 gehender Feinheit der Zerlegung gegen einen Grenzwert konvergiert, und besitzt dann die **Bogenlänge** $L = \lim\limits_{\mathfrak{F}(Z)\to 0} \sum_{i=1}^{n} ||c(z_i) - c(z_{i-1})||$.

Bogenlänge stetig diff. Kurven Die Bogenlänge einer stetig differenzierbaren Kurve $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit $c(t) = (c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t))$ entspricht dem Ingegral
$L = \int_a^b ||c'(t)||dt = \int_a^b \sqrt{c_1'(t)^2 + \cdots + c_n'(t)^2}dt$.

Kurvenintegral einer skalaren Funktion Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und $g(t) = f(c(t))$ stückweise stetig. Das Kurvenintegreal der skalaren Funktion f längs c ist dann das Integral $\int_a^b f(c(t)) \cdot ||c'(t)||dt$.

Krümmung einer Kurve Für eine stetig differenzierbare ebene Kurve $c(t)$ mit $l(t) = s$ als Bogenlänge zum Parameter t ist die Krümmung der Kurve im Punkt $c(t)$ definiert als $k(t) = \frac{d}{ds}\varphi\left(l^{-1}(s)\right)$.

Wenn $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$ zweimal stetig differenzierbar ist, dann ist $k(t) = \frac{c_1'(t)c_2''(t) - c_1''(t)c_2'(t)}{(c_1'(t)^2 + c_2'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Falls die Kurve $c(t) = (t, f(t))$ ist (also der Graph einer Funktion), so gilt $k(t) = \frac{f''(t)}{(1+f'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Kurvenintegral eines Vektorfeldes Für eine Kurve $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und einem Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist das Kurvenintegeral des Vektorfeldes f längs der Kurve c definiert als das Integral $\int_c f(x)dx = \int_c (f_1(x_1, \ldots, x_n)dx_1 + \ldots + f_n(x_1, \ldots, x_n)dx_n) = \int_a^b f(c(t)) \cdot c'(t)dt = \int\limits_a^b \left(\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(c(t))c_k'(t)\right) dt$

Eigenschaften des Kurvenintegrals

- Der Betrag des Kurvenintegrals hängt nur von der Kurve selbst ab, nicht von der Parametrisierung.
- Durchläuft man die Kurve in entgegengesetzter Richtung, so wechselt der Wert das Vorzeichen.
- Liniarität bezgl. des Vektorfeldes: Seien f_1, f_2 zwei Vektorfelder und c eine Kurve (alle in $\mathbb{R}^n$), so gilt: $\int_c (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_c f_1(x)dx + \int_c f_2(x)dx$.
- Additivität bezgl. des Weges: Sei f ein Vektorfeld und c_1, c_2 Kurven mit $c_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $c_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$, $c_1(b) = c_2(c)$, und sei c die durch c_1, c_2 zusammengesetzte Kurve, so gilt: $\int_{c_1} f(x)dx + \int_{c_2} f(x)dx = \int_c f(x)dx$.

Offen, Abgeschlossen, kompakt, Zusammenhang, Gebiet, Gradientenfeld, Potential Eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt offen, wenn es zu jedem $x \in D$ folgt eine Umgebumg $U_\epsilon(x)$ mit $U_\epsilon(x) \subseteq D$ gibt.

Die Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge, deren Glieder in D liegen, selbst in D liegt.

Eine in $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossene und beschränkte Menge heisst kompakt.

Die Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend, wenn zu je zwei Punkten $x_1, x_2 \in D$ eine Kurve $c : [a,b] \to D$ mit $c(a) = x_1$ und $c(b) = x_2$ existiert.

Eine offene und zusammenhängende Menge D heisst Gebiet.

Ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend, wenn sich jede geschlossene Kurve in D stetig auf einen ihrer Punkte zusammenziehen lässt.

Für ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein stetiges Verktorfeld f nennt man f ein Gradientenfeld, wenn es ein Skalarfeld F mit $\texttt{grad}F = f$ gibt. Dann heißt F Stammfunktion und F-Potential von f.

Wenn $D \subseteq \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend und f ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf D ist, dann ist f genau dann ein Gradientenfeld, wenn f die Intergrabilitätsbedingungen erfüllt.

Integrabilitätsbedingungen Ein stetig differenzierbares Gradientenfeld f erfüllt die Integrabilitätsbedingungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ für alle i, j mit $1 \leq i, j \leq n$.

Wegunabhängigkeit Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und f ein Vektorfeld. Das Kurvenintegral von f längs einer stetig differenzierbaren Kurve $c : [a, b] \to D$ ist genau dann wegunabhängig, wenn das Vektorfeld f ein Gradientenfeld ist. Wegunabhängig heisst dann, dass das Kurvenintegral nur von Anfangs- und Endpunkt bestimmt ist.

Dann ist F eine Stammfunktion von f, und es gilt: $\int_c f(x)dx = F(c(b)) - F(c(a))$.

Weiters folgt, dass in einem Gradientenfeld die Kurvenintegrale über geschlossenen Kurven gleich 0 sind: $\oint_c f(x)dx = 0$.

Differenzengleichungen

Eine (autonome) Differenzengleichung erster Ordnung hat die Form $x_{n+1} = f(x_n)$, eine zweiter Ordnung $x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n)$.

Allgemein k-ter Ordnung $F(n, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}) = 0$ mit $n \in \mathbb{N}_0^+$. Die dazu explizite Form ist $x_{n+k} = f(n, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1})$. Sie heisst autonom, wenn sie nicht von n abhängt, und hat dann die Form $x_{n+k} = f(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1})$.

Die Differenzengleichung ist linear, wenn f in x_n linear ist, ansonnsten ist sie nicht linear.

Eine partikuläre Lösung ist eine Folge, bei der jeweils k aufeinander folgende Glieder die Gleichung $F(\ldots) = 0$ erfüllen. Eine allgemeine Lösung ist ein Term zur Bildung der partikulären Lösungen. Z.B. ist für $x_{n+1} = 2x_n + 1$ die allgemeine Lösung $x_n = 2^n C - 1$ mit $C \in \mathbb{R}$, und eine partikuläre Lösung mit $x_0 = 1$ und $C = 1$ wäre $x_n = 2^n - 1$.

Die Lösung einer Differenzengleichung durch eine explizite Formel (für x_n) nennt man die quantitative, das Finden von Gleichgewichtslagen und bestimmung der Stabilität die qualitative Theorie.

Lineare Differenzengleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Für $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$ mit $n = 0, 1, 2, \cdots$ gilt:

$$x_n = \begin{cases} a^n x_0 + b\frac{a^n - 1}{a - 1} & \text{für } a \neq 1 \\ x_0 + bn & \text{für } a = 1 \end{cases}.$$

Allgemeine homogene Differenzengleichung erster Ordnung Hat die Form $x_{n+1} = a_n x_n$ mit $(n \in \mathbb{N}_0^+)$ und besitzt die allgemeine Lösung $x_n = C \cdot \prod_{i=0}^{n-1} a_i$.

Allgemeine inhomogene Differenzengleichung erster Ordnung Hat die Form $x_{n+1} = a_n x_n + b_n$ mit $(n \in \mathbb{N}_0^+)$, b_n nennt man die Störfunktion. Sie besitzt die Lösung $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$, wobei $x_n^{(h)}$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $x_{n+1} = a_n x_n$ ist, und $x_n^{(p)}$ eine beliebige partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.

Methoden zum Bestimmen von $x_n^{(p)}$

• Variation der Konstanten Es wird die Konstante C von $x_n^{(h)}$ variiert: $x_n^{(p)} = C_n \prod_{i=0}^{n-1} a_i$. In $x_{n+1} = a_n x_n + b_n$ eingesetzt ergibt dies $C_{n+1} \prod_{i=0}^{(n+1)-1} a_i = a_n \cdot C_n \prod_{i=0}^{n-1} a_i + b_n$. Kann hieraus $C_n = T(n)$ gefolgert werden (mit frei wählbaren C_0), so erhält man $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = C \cdot \prod_{i=0}^{n-1} a_i + T(n) \cdot \prod_{i=0}^{n-1} a_i = (C + T(n)) \cdot \prod_{i=0}^{n-1} a_i$ mit $C \in \mathbb{R}$.

• Methode des unbestimmten Ansatzes
!!!TODO!!!

• Methode der erzeugenden Funktionen
!!!TODO!!!

Fix- bzw. Gleichgewichtspunkt Ein Punkt x^* einer Differenzengleichung $x_{n+1} = f(x_n)$ mit $f(x^*) = x^*$ heißt Fix- bzw. Gleichgewichtspunkt der Differenzengleichung. Graphisch ist dies der Schnittpunkt der Kurve $y = f(x)$ mit der Geraden $y = x$.

Der Grenzwert eine konvergenten Lösungsfolge ist immer ein Gleichgewichtspunkt, zu jedem Gleichgewichtspunkt existiert die konstante Lösungsfolge $x_n = x^*$.

Stabilität von Gleichgewichtslagen Sei x^* ein Gleichgewichtspunkt der Differenzengleichung $x_{n+1} = f(x_n)$. x^* heißt stabil, wenn $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon) > 0$
$\forall$ Lösungsfolge (x_n) mit $|x_0 - x^*| < \delta(\epsilon)\ \forall n : |x_n - x^*| < \epsilon$, andernfalls instabil.

Ist x^* stabil, und gilt zusätzlich $\exists\delta > 0\ \forall(x_n)$ mit $|x_0 - x^*| < \delta : \lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, dann heißt x^* asymptotisch stabil.

Weiters ist x^* asymptotisch stabil, wenn $|f'(x^*)| < 1$, und instabil, wenn $|f'(x^*)| > 1$.

Stabil bedeutet, dass eine Lösungsfolge innerhalb einer beliebigen Umgebung von x^* bleibt, wenn sie nahe genug an x^* beginnt, asymptotisch stabil, dass die Lösungsfolge gegen x^* konvergiert.

Lineare Differenzengleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = s_n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ mit konstanten Koeffizienten a, b. Ist die Störfunktion $s_n = 0$ nennt man diese homogen, ansonnsten imhomogen.

Die Lösungsgesamtheit setzt sich aus einer allgemeinen Lösung der homogenen Teils (also ohne Störfunktion), und einer beliebigen partikulärer Lösung des inhomogenen Teils (mit Störfunktion) zusammen: $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$.

Die allgemeine Lösung $x_n^{(h)}$ einer lin. Diff.gleichung zweiter Ordnung Sind $x_n^{(1)}$ und $x_n^{(2)}$ Lösungen der homogenen Gleichung $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$, so ist auch $x_n = C_1 x_n^{(1)} + C_2 x_n^{(2)}$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ Lösung dieser Gleichung.

Gilt $\begin{vmatrix} x_0^{(1)} & x_0^{(2)} \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0$, dann ist x_n die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung.

Sei $x_n^{(h)} = \lambda^n$, so folgt die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ mit der charakteristischen Wurzeln λ_1, λ_2.

Abhängig von der Diskriminante $a^2 - 4b$ der charakteristische Gleichung gibt es dann die drei Lösungsfälle (mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$): $x_n^{(h)} =$

$$\begin{cases} C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n & , \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ (C_1 + C_2 n)\lambda_1^n & , \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ r^n(C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi) & , \substack{\lambda_{1,2} = r(\cos\varphi \pm i \sin\varphi) \\ \text{konjugiert komplex}} \end{cases}$$

Literatur

[DGKP07] M. Drmota, B. Gittenberger, G. Karigl, and A. Panholzer. *Mathematik für Informatiker.* Heldermann Verlag, Lemgo, 2007.

[KL05] Guenther Karigl and Stefan Lenk. Mathematik 1 fuer informatiker. Institut fuer Diskrete Mathematik und Geometrie TU Wien, 2005. Skriptum zur Vorlesung an der TU Wien.

[Neu82] Hrsg. Helmut Neunzert. *Analysis 2.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

[SM95] Horst Stöcker and Robert Münzel. *Mathematische Formeln für die technische Ausbildung und Praxis.* Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, 1995.