Theoretische Informatik u. Mathematisch Logik, Wintersemester 2006, Übungsteil II

Alexander (Axel) Straschil

9. Januar 2007

Lösungen von Alexander Straschil (MatNr 9526547) zum zweiten Übungsteil der Vorlesung Theoretische Informatik und Logik an der TU-Wien, Wintersemester 2006, gehalten von Rudolf Freund und Marion Oswald, LvaNr 185.263. Fehlerhinweise bitte per Email an axel@straschil.com.

Danke an Samuel Ferraz-Leite sowie „ran“, „Tobi“ und „anty“ aus dem Informatik-forum.at für Korrektur.

1 Aussagenlogik

Aufgabe 1 *Transformieren Sie folgende Formeln in konjunktive Normalform (KNF) und geben Sie diese auch in Mengennotation an.*

Die Konjunktive Normalform ist eine Konjunktion von Disjunktionen, also durch $\wedge$ konjungierte Terme die durch $\vee$ disjunktierte Variablen enthalten: $\bigwedge_i \bigvee_j x_{ij}$ Für die Auflösung von Implikation $\rightarrow$ und Äuivalenz $\leftrightarrow$ gilt: $x \rightarrow y \Leftrightarrow \neg x \vee y$ und $x \leftrightarrow y \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee \neg(x \vee y)$.

Zur Umwandlung einer Formel in die KNF müssen zuerst alle Implikationen und Konjunktionen aufgelöst werden und alle Negationen von Termen in die Terme vor die Variablen gebracht werden. Dannach durch Umformen und auflösen von Klammern die KNF herstellen, u.U. den Term vereinfachen.

(a) $(Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P \wedge Q) \wedge (P \rightarrow Q \vee R) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)$.

Implikationen und Konjugationen auflösen:
$(\neg Q \vee R) \wedge (\neg R \vee (P \wedge Q)) \wedge (\neg P \vee (Q \vee R)) \wedge \neg((P \wedge Q) \vee \neg(P \vee Q))$
Negationen in die Terme bringen:
$(\neg Q \vee R) \wedge (\neg R \vee (P \wedge Q)) \wedge (\neg P \vee (Q \vee R)) \wedge (\neg(P \wedge Q) \wedge (P \vee Q))$
$(\neg Q \vee R) \wedge (\neg R \vee (P \wedge Q)) \wedge (\neg P \vee (Q \vee R)) \wedge ((\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q))$

Geschachtelte Termen ausmultiplizieren, unnötige Klammern weglassen:
$(\neg Q \vee R) \wedge (\neg R \vee P) \wedge (\neg R \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$
Ordnen:
$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R) \wedge (Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$
Mengennotation (Klauselmengen):
$\{\{P, Q\}, \{\neg P, \neg Q\}, \{P, \neg R\}, \{Q, \neg R\}, \{\neg Q, R\}, \{\neg P, Q, R\}\}$

(b) $(P \wedge (Q \rightarrow R)) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge \neg((P \leftrightarrow Q) \rightarrow R)$.

Implikationen und Konjugationen auflösen:
$(P \wedge (\neg Q \vee R)) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge \neg(\neg((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \vee R)$
Negationen in die Terme bringen:
$(P \wedge (\neg Q \vee R)) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \wedge \neg R)$
Unnötige Klammern weglassen:
$P \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \wedge \neg R$
Zwischenrechnung: $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) = ((P \wedge Q) \vee \neg P) \wedge ((P \wedge Q) \vee \neg Q) = (Q \vee \neg P) \wedge (P \vee \neg Q)$
Geschachtelte Termen ausmultiplizieren:
$P \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (Q \vee \neg P) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge \neg R$
Ordnen:
$P \wedge \neg R \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$
Mengennotation (Klauselmengen):
$\{P, \neg R, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P, Q, R\}\}$

Aufgabe 2 *Geben Sie eine geeignete Substitution σ für die Formelpaare (F, G) so an, dass $F_\sigma = G$ gilt:*

(a) $F = A \rightarrow (B \vee A)$ und $G = ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow C) \rightarrow (((B \rightarrow \neg A) \rightarrow C) \vee ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow C))$.

$$\sigma = \begin{bmatrix} ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow C) & ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow C) \\ A & B \end{bmatrix}$$

(b) $F = ((A \wedge B) \rightarrow (C \vee A)) \rightarrow B$ und $G = (((\neg A \wedge \neg B) \wedge (B \vee A)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \vee (\neg A \wedge \neg B))) \rightarrow (B \vee A)$.

$$\sigma = \begin{bmatrix} (\neg A \wedge \neg B) & (B \vee A) & \neg(A \rightarrow B) \\ A & B & C \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3 *Zeigen Sie die funktionale Vollständigkeit der Operatoren p bzw. s:*
Funktional vollständig heisst, dass mit der gegebenen Operatorenmengen (oder im hier vorliegendem Fall dem gegebenen Operator) alle aussagenlogische Ausdrücke dar-

gestellt werden können. Dies ist sicher immer dann der Fall, wenn die Operatonen Negation, Konjunktion und Disjunktion ausgedrückt werden können.

Da die Operator-Mengen $\{\neg, \wedge\}$ (wegen $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B))$) und $\{\neg, \vee\}$ (wegen $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B))$) funktional vollständig sind reicht es, wenn eine Abbildung auf eine dieser beiden Mengen gezeigt werden kann.

(a)

A	B	p
t	t	f
t	f	f
f	t	f
f	f	t

Die angegeben Operation entspricht dem logischen NOR (not or) Operator der funktional vollständig ist, dies ist hier zu zeigen.

Die Negation ist durch $p(A, A) \Leftrightarrow \neg A$, die Konjunktion durch $p(p(A, A), p(B, B)) \Leftrightarrow p(\neg A, \neg B) \Leftrightarrow A \wedge B$ darstellbar, also ist der Operator p funktional vollständig.

(b)

A	B	s
t	t	f
t	f	t
f	t	t
f	f	t

Die angegeben Operation entspricht dem logischen $NAND$ (not and) Operator der funktional vollständig ist, dies ist hier zu zeigen.

Die Negation ist durch $s(A, A) \Leftrightarrow \neg A$, die Konjunktion durch $s(s(A, B), s(A, B)) \Leftrightarrow \neg(s(A, B)) \Leftrightarrow A \wedge B$ darstellbar, also ist der Operator s funktional vollständig.

Aufgabe 4 Verwenden Sie den Sequentialkalkül, um die Unerfüllbarkeit der Formel (a) bzw. die Gültigkeit der Formel (b) nachzuweisen. Finde Sie durch Konstruktion einens gegeigneten Ableitungsversuches im Sequentialkalkül für die unter (c) und (d) gegebenen Formeln entweder ein Gegenmodell oder den Nachweis, dass die entsprechende Formel gültig ist.

(a) $\neg((A \to C) \to ((\neg B \vee C) \to ((A \vee B) \to C)))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash C}{\vdash A \to C}\to r \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash \neg B, C}{\vdash \neg B \vee C}\vee r \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash A, B}{\vdash A \vee B}\vee r \qquad C \vdash}{(A \vee B) \to C \vdash}\to l}{(\neg B \vee C) \to ((A \vee B) \to C) \vdash}\to l}{(A \to C) \to ((\neg B \vee C) \to ((A \vee B) \to C)) \vdash}\to l}{\vdash \neg((A \to C) \to ((\neg B \vee C) \to ((A \vee B) \to C)))}\neg r$$

$\{A \vdash B\}$, $\{\vdash \neg B, C\}$, $\{\vdash A, B\}$ und $\{C \vdash\}$ sind Anti-Axiome, also ist die Formel unerfüllbar.

(b) $((\neg A \to B) \to (C \vee D)) \vee (\neg D \wedge (B \vee A))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A,D \vdash C,D}{D \vdash C,D,\neg A}\neg l}{\vdash \neg D,C,D,\neg A}\neg l \quad \dfrac{\dfrac{A \vdash B,A,C,D}{A \vdash B \vee A,C,D}\neg r}{\vdash B \vee A,C,D,\neg A}\neg r}{\vdash \neg D \wedge (B \vee A),D,\neg A}\wedge r}{\vdash \neg D \wedge (B \vee A),C \vee D,\neg A}\vee r \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B,D \vdash C,D}{B \vdash C,D,\neg D}\neg r}{B \vdash C \vee D,\neg D}\vee r \quad \dfrac{\dfrac{B \vdash C,D,B,A}{B \vdash C \vee D,B,A}\vee r}{B \vdash C \vee D,B \vee A}\vee r}{B \vdash \neg D \wedge (B \vee A),C \vee D}\wedge r}{\dfrac{\neg A \to B \vdash \neg D \wedge (B \vee A),C \vee D}{\dfrac{\vdash ((\neg A \to B) \to (C \vee D)),(\neg D \wedge (B \vee A))}{\vdash ((\neg A \to B) \to (C \vee D)) \vee (\neg D \wedge (B \vee A))}\vee r}\to r}\to l$$

$\{A, D \vdash C, D\}$, $\{A \vdash B, A, C, D\}$, $\{B, D \vdash C, D\}$ und $\{B \vdash C, D, B, A\}$ sind Axiome, also ist die Formel erfüllbar.

(c) $(A \to B \vee C) \to ((A \to B) \vee (A \to C))$

Wegen $(A \to B \vee C) \Leftrightarrow ((A \to B) \vee (A \to C))$ entspricht die Formel $X \to X$, ist also tautologisch und sicher richtig.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A,\cancel{A} \vdash A,C,B}{A \vdash A,A \to C,B}\to r}{\vdash A,A \to B,A \to C}\to r \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A,B \vdash C,B \quad A,C \vdash C,B}{B \vee C,A,\cancel{A} \vdash C,B}\vee l}{B \vee C,A \vdash A \to C,B}\to r}{B \vee C \vdash A \to B,A \to C}\to r}{\dfrac{A \to B \vee C \vdash A \to B,A \to C}{\dfrac{A \to B \vee C \vdash (A \to B) \vee (A \to C)}{\vdash (A \to B \vee C) \to ((A \to B) \vee (A \to C))}\to r}\vee r}\to l$$

$\{A \vdash A, C, B\}$, $\{A, B \vdash C, B\}$ und $\{A, C \vdash C, B\}$ sind Axiome, also ist die Formel erfüllbar.

(d) $(A \to B) \to ((A \wedge B) \to \neg(A \vee B))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A,B,\cancel{A} \vdash A \quad A,B,\cancel{B} \vdash A}{A,B,A \vee B \vdash A}\vee l}{A,B \vdash \neg(A \vee B),A}\neg r}{A \wedge B \vdash \neg(A \vee B),A}\wedge l \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A,B,\cancel{A} \vdash \quad A,B,\cancel{B} \vdash}{A,B,\cancel{B},A \vee B \vdash}\vee l}{A \wedge B,B,A \vee B \vdash}\wedge l}{A \wedge B, \vdash \neg(A \vee B)}\neg r}{\dfrac{A \to B,A \wedge B \vdash \neg(A \vee B)}{\dfrac{A \to B \vdash (A \wedge B) \to \neg(A \vee B)}{\vdash (A \to B) \to ((A \wedge B) \to \neg(A \vee B))}\to r}\to r}\to l$$

$\{A, B \vdash\}$ ist kein Axiom, also ist die Formel nicht erfüllbar.

Aufgabe 5 *Beweisen Sie mittels Resolution die Gültigkeit der Formel* $(Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P \wedge Q) \wedge (P \rightarrow Q \vee R) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$

Umwandeln der negierten Formel in KNF:
$\neg((Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P \wedge Q) \wedge (P \rightarrow Q \vee R) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)) =$
$\neg(((Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P \wedge Q) \wedge (P \rightarrow Q \vee R)) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)) =$
$\neg(\neg((Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P \wedge Q) \wedge (P \rightarrow Q \vee R)) \vee (P \leftrightarrow Q)) =$
$(Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P \wedge Q) \wedge (P \rightarrow Q \vee R)) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q) =$
$(Q \rightarrow R) \wedge (\neg R \vee (P \wedge Q)) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)) \wedge \neg((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) =$
$(\neg Q \vee R) \wedge (\neg R \vee P) \wedge (\neg R \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$
KNF als Klauselmenge:
$\{\{P, Q\}, \{\neg P, \neg Q\}, \{P, \neg R\}, \{Q, \neg R\}, \{\neg Q, R\}, \{\neg P, Q, R\}\}$
Resolution:
$\{Q, R\} \Leftarrow \{P, Q\}, \{\neg P, Q, R\}$
$\{Q\} \Leftarrow \{Q, R\}, \{Q, \neg R\}$
$\{R\} \Leftarrow \{Q, R\}, \{\neg Q, R\}$
$\{P\} \Leftarrow \{P, \neg R\}, \{R\}$
$\{\neg Q\} \Leftarrow \{P\}, \{\neg P, \neg Q\}$
$\{\} \Leftarrow \{Q\}, \{\neg Q\}$
Da die leere Klausel abgeleitet werden konnte ist die Negation der Formel unerfüllar, also die Formel gültig.

Aufgabe 6 *Beweisen oder widerlegen Sie mittels Resolution die folgenden Klauselmengen.*

(a) $\{\{P, Q, \neg R\}, \{P, \neg Q, R\}, \{\neg P, \neg Q, R\}, \{\neg P, Q, \neg R\}, \{\neg P, \neg Q\}\}$

Resolution:
$\{Q, \neg R\} \Leftarrow \{P, Q, \neg R\}, \{\neg P, Q, \neg R\}$
$\{\neg Q, R\} \Leftarrow \{P, \neg Q, R\}, \{\neg P, \neg Q, R\}$
$\{\neg P, \neg R\} \Leftarrow \{\neg P, Q, \neg R\}, \{\neg P, \neg Q\}$
Die Klauselmenge kann nicht wiederlegt werden, eine gültige Belegung ist z.B. $P \in \{true, false\}$, $Q = R = false$.

(b) $\{\{P, R, \neg S\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, R\}, \{R, S\}, \{\neg R\}, \{Q\}\}$

Resolution:
$\{\neg P\} \Leftarrow \{\neg P, R\}, \{\neg R\}$
$\{\neg Q\} \Leftarrow \{P, \neg Q\}, \{\neg P\}$
$\{\} \Leftarrow \{\}, \{\neg Q\}$
Durch Ableitung der leeren Klausel konnte die Klauselmengen wiederlegt werden.

Aufgabe 7 *Begründen Sie, warum es keine Resolutionswiderlegung für folgende Klauselmengen geben kann:*

(a) $\{\{\neg A, B, C\}, \{A, \neg B, C\}, \{A, B, \neg C\}\}$

Alle Klauseln enthalten paarweise zwei duale Literale, bei Anwendung der Resolutionsregel könnten also nur Tautologien, nie aber die leere Klausel gefunden werden.

(b) $\{\{A, \neg A\}, \{B, \neg B\}, \{C, \neg C\}\}$

Die Klauselmenge ist eine Konjunktion von drei Tautologien. Nach der Tautologieelimination bleibt nur noch die leere Klauselmenge (nicht die lere Klausel!) über, die immer $true$ ist.

2 Prädikatenlogik

Aufgabe 8 *Geben Sie jeweils ein Modell für folgende Formeln an:*

(a) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$

$M = (\mathbb{N}, \Phi, I)$, $\mathbb{N} :=$ Menge der nat. Zahlen, $\Phi(P) :=$„ist gerade", $\Phi(Q) :=$„ist ungerade". M ist ein Modell, da jede nat. Zahl entweder gerade oder ungerade ist.

(b) $(\forall x)(P(x) \rightarrow P(f(x)))$

$M = (\mathbb{N}, \Phi, I)$, $\mathbb{N} :=$ Menge der nat. Zahlen, $\Phi(P) :=$„ist durch zwei teilbar", $\Phi(f) := f(n) = 2n$. M ist ein Modell, da wahr für jede ungerade nat. Zahl, und wahr für jede gerade nat. Zahl, da wenn $n \in \mathbb{N}$ gerade auch $2n$ gerade ist.

Aufgabe 9 *Geben Sie für die folgenden Atomformeln je einen allgemeinsten Unifikator bzw. Gründe an, warum die Atomformeln nicht unifizierbar sind.*

(a) $P(x, x), P(f(a), f(y))$

$\sigma = \{x \leftarrow f(a), y \leftarrow a\}$

(b) $P(g(f(x), x)), P(g(y, a))$

$\sigma = \{x \leftarrow a, y \leftarrow f(a)\}$

(c) $P(x, f(y), x), P(a, f(a), g(w, z))$

Nicht unifizierbar, da bei $\{x \leftarrow a, y \leftarrow a\}$ nach $P(a, f(a), a), P(a, f(a), g(w, z))$ unifiziert werden würde, und diese Formeln nicht mehr weiter unifizierbar sind (u.U. kann $g(w, z)$ nicht a annehmen).

(d) $P(g(f(x, x), y, i(z)), a, f(x)), P(g(l(w, w), c, i(v)), u, f(g(v)))$

Nicht unifizierbar, da $f(x, x)$ und $l(w, w)$ u.U. nicht den gleichen Bildbereich besitzt.

Aufgabe 10 *Geben Sie Resolutionsbeweise der folgenden Formeln an.*

(a) $(P(a) \wedge (\forall x)(P(x) \rightarrow P(f(x)))) \rightarrow P(f(f(a)))$

$F = (P(a) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow P(f(x)))) \rightarrow P(f(f(a)))$, es wird versucht $\neg F$ zu wiederlegen.
$\neg F = \neg((P(a) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow P(f(x)))) \rightarrow P(f(f(a))))$
Implikationen auflösen:
$\neg(\neg(P(a) \wedge \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))) \vee P(f(f(a))))$
Negationen vor die Atome:
$(P(a) \wedge \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))) \wedge \neg P(f(f(a)))$
Variablennormierung nicht notwendig, Quantor kann vorgezogen werden, Skolemfrom bereits in KNF:
$\forall x(P(a) \wedge (\neg P(x) \vee P(f(x)))) \wedge \neg P(f(f(a)))$
Negationsnormalform ohne Quantoren:
$P(a) \wedge (\neg P(x) \vee P(f(x))) \wedge \neg P(f(f(a)))$
Klauselmenge bilden:
$\{\{P(a)\}, \{\neg P(x), P(f(x))\}, \{\neg P(f(f(a)))\}\}$
Resolution:
$\{P(f(a))\} \Leftarrow \quad [x \leftarrow a] \quad \{P(a)\}, \{\neg P(x), P(f(x))\}$
$\{\neg P(f(a))\} \Leftarrow \quad [x \leftarrow f(a)] \quad \{P(f(x))\}, \{\neg P(f(f(a)))\}$
$\{\} \Leftarrow \quad \{P(f(a))\}, \{\neg P(f(a))\}$
$\neg F$ konnte durch die Herleitung der leeren Klausel wiederlegt werden, also ist F erfüllbar.

(b) $((\forall x)(\exists y)P(x, y) \wedge (\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow Q(x, y))) \rightarrow (\forall x)(\exists y)Q(x, y)$

$F = ((\forall x)(\exists y)P(x, y) \wedge (\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow Q(x, y))) \rightarrow (\forall x)(\exists y)Q(x, y)$ es wird versucht $\neg F$ zu wiederlegen.
$\neg F = \neg(((\forall x)(\exists y)P(x, y) \wedge (\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow Q(x, y))) \rightarrow (\forall x)(\exists y)Q(x, y))$
Implikationen auflösen:
$\neg(\neg((\forall x)(\exists y)P(x, y) \wedge (\forall x)(\forall y)(\neg P(x, y) \vee Q(x, y))) \vee (\forall x)(\exists y)Q(x, y))$
Negationen vor die Atome:
$\forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \forall y(\neg P(x, y) \vee Q(x, y)) \wedge \exists x \forall y \neg Q(x, y)$

Variablennormierung von durch Quantoren gebundenen Variablen:
$\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x' \forall y' (\neg P(x',y') \vee Q(x',y')) \wedge \exists x'' \forall y'' \neg Q(x'',y'')$
$\forall x \exists y \forall x' \forall y' \exists x'' \forall y'' (P(x,y) \wedge (\neg P(x',y') \vee Q(x',y')) \wedge \neg Q(x'',y''))$
Existenzquantoren eliminieren, $\exists y$ steht im Einfluss von $\forall x$, $\exists x''$ ist freistehend:
$[y/f(x), x''/a]$
$\forall x \forall x' \forall y' \forall y'' (P(x,f(x)) \wedge (\neg P(x',y') \vee Q(x',y')) \wedge \neg Q(a,y''))$
Obige Skolemform ist bereits in KNF, umwandlen in Klauselmenge
$\{\{P(x,f(x))\}, \{\neg P(x',y'), Q(x',y')\}, \{\neg Q(a,y'')\}\}$
Resolution:
$\{Q(a,b)\} \Leftarrow [x \leftarrow a, f(x) \leftarrow b, x' \leftarrow a, y' \leftarrow b]\{P(x,f(x))\}, \{\neg P(x',y'), Q(x',y')\}$
$\{\} \Leftarrow [y'' \leftarrow b]\{Q(a,b)\}, \{\neg Q(a,y'')\}$
$\neg F$ konnte durch die Herleitung der leeren Klausel wiederlegt werden, also ist F erfüllbar.