Lösungen zur Theoretischen Informatik I, Wintersemster 2007, Bsp 3.1, 3.2

Alexander (Axel) Straschil

25. Oktober 2007

Aufgabe 3.1 Sei $L = \{ww | w \in \{0,1\}^*\}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass L nicht regulär ist.

Das Pumping Lemma für reguläre Sprachen:
$L_{reg} \Rightarrow \exists m > 0 \ \forall v \in L, |v| \geq m \ \exists x, y, z, \ xyz = v, y \neq \epsilon, |xy| \leq m \ \forall i \leq 0 : xy^i z \in L$

Wenn L regulär ist, dann muss das PL gelten, also $m > 0$ existieren. Sei $v = 0^m 1 0^m 1 \in L$, $|v| = 2m + 2 \geq m$. Wegen $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$ ist $|xy| \in 0^+$. Sei $k = |x|, l = |y|$, dann ist $v = 0^k 0^l 0^{m-k-l} 1 0^m 1$ mit $l > 0$. $0^k 0^l 0^{m-k-l} 1 0^m 1$ kann umgeformt werden auf $0^k 0^{m-k-l} 0^l 1 0^m 1 = 0^{k+m-k-l} 0^l 1 0^m 1 = 0^{m-l} 0^l 1 0^m 1$

Wegen dem PL muss gelten: $\forall i \leq 0 : v_i = xy^i z = 0^{m-l} 0^{l \cdot i} 1 0^m 1 \in L$. Also muss für $i = 0$ gelten: $v_0 = xy^0 z = 0^{m-l} 0^{l \cdot 0} 1 0^m 1 = 0^{m-l} 1 0^m 1 \in L$.

Dieses Wort kann aber nicht nach der Definition von L gebildet werden. Also gilt für L das PM nicht, also ist L nicht regulär.

Aufgabe 3.2 Sei $L = \{a^{2^n} | n \geq 0\}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass L nicht regulär ist.

Das Pumping Lemma für reguläre Sprachen:
$L_{reg} \Rightarrow \exists m > 0 \ \forall w \in L, |w| \geq m \ \exists x, y, z, \ xyz = w, y \neq \epsilon, |xy| \leq m \ \forall i \leq 0 : xy^i z \in L$

Wenn L regulär ist, dann muss das PL gelten, also $m > 0$ existieren. Sei $w = a^{2^m}$ mit $|w| = 2^m \geq m$. Sei $xyz = w$ die Zerlegung aus dem PL und $|x| = j, |y| = k$. Dann ist $|z| = 2^m - j - k$. Wegen dem PL muss dann für alle $i \geq 0$ gelten: $w_i = xy^i z = a^j a^{i \cdot k} a^{2^m - j - k} \in L$. $a^j a^{i \cdot k} a^{2^m - j - k} = a^{j + i \cdot k + 2^m - j - k} = a^{k(i-1) + 2^m}$.

Also $\forall i \geq 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : |w_i| = k(i-1) + 2^m = 2^n$.

Die Differenz von zwei Wörtern w_i und w_{i+1} ist k, w_i wächst also linear. Dagegen wächst 2^n exponentiell. Es kann also nicht für alle w_i ein n gefunden werden, so dass w_i in L liegt.

Beweis: Sei $|w_i| = r_0 = 2^{n_0}$, dann ist $|w_{i+1}| = r_1 = 2^{n_1}$ und $|w_{i+2}| = r_2 = 2^{n_2}$. Dann ist $r_1 - r_0 = r_2 - r_1 = k$. Also muss gelten:$2^{n_1} - 2^{n_0} = 2^{n_2} - 2^{n_1} = k$, also $n_1 - n_0 = n_2 - n_1 = ld(k)$ Die Steigung von 2^x ist aber $ln(2) \cdot 2^x$, und niemals der konstante Faktor k!

Damit erfüllt L nicht das PL, und ist nicht regulär.